

Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche  
Reifeprüfung/Reife- und Diplomprüfung

# Formelsammlung

Mathematik (AHS)  
Angewandte Mathematik (BHS)  
Berufsreifeprüfung Mathematik

# Inhaltsverzeichnis

---

Kapitel	Seite
1 Mengen	3
2 Vorsilben	3
3 Potenzen	3
4 Logarithmen	4
5 Quadratische Gleichungen	4
6 Ebene Figuren	5
7 Körper	6
8 Trigonometrie	7
9 Komplexe Zahlen	8
10 Vektoren	8
11 Geraden	9
12 Matrizen	10
13 Folgen und Reihen	11
14 Änderungsmaße	11
15 Wachstums- und Abnahmeprozesse	12
16 Ableitung und Integral	13
17 Differenzialgleichungen 1. Ordnung	14
18 Statistik	15
19 Wahrscheinlichkeit	16
20 Lineare Regression	18
21 Finanzmathematik	19
22 Investitionsrechnung	20
23 Kosten- und Preistheorie	21
24 Technisch-naturwissenschaftliche Grundlagen	22
Index	23

# 1 Mengen

$\in$	ist Element von ...
$\notin$	ist nicht Element von ...
$\cap$	Durchschnitt(smenge)
$\cup$	Vereinigung(smenge)
$\subset$	echte Teilmenge
$\subseteq$	Teilmenge
$\setminus$	Differenzmenge („ohne“)
$\{\}$	leere Menge

## Zahlenmengen

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen
$\mathbb{Q}$	rationale Zahlen
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen
$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen
$\mathbb{R}^+$ bzw. $\mathbb{R}^-$	positive bzw. negative reelle Zahlen
$\mathbb{R}_0^+$ bzw. $\mathbb{R}_0^-$	positive bzw. negative reelle Zahlen mit Null

## 2 Vorsilben

Tera-	T	$10^{12}$	Dezi-	d	$10^{-1}$
Giga-	G	$10^9$	Zenti-	c	$10^{-2}$
Mega-	M	$10^6$	Milli-	m	$10^{-3}$
Kilo-	k	$10^3$	Mikro-	$\mu$	$10^{-6}$
Hekto-	h	$10^2$	Nano-	n	$10^{-9}$
Deka-	da	$10^1$	Pico-	p	$10^{-12}$

## 3 Potenzen

### Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

$$a \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \qquad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} \qquad a^1 = a \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \qquad a^{-1} = \frac{1}{a} \qquad a^0 = 1$$

### Potenzen mit rationalen Exponenten (Wurzeln)

$$a, b \in \mathbb{R}_0^+; n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \text{mit} \quad n \geq 2$$

$$a = \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a^n = b \qquad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k} \qquad a^{-\frac{k}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^k}} \quad \text{mit} \quad a > 0$$

## Rechenregeln

$a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; r, s \in \mathbb{Z}$   
bzw.  $a, b \in \mathbb{R}^+; r, s \in \mathbb{Q}$

$a, b \in \mathbb{R}_0^+; m, n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  mit  $m, n \geq 2$

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

## Binomische Formeln

$a, b \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

$$(a - b)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

## 4 Logarithmen

$a, b, c \in \mathbb{R}^+$  mit  $a \neq 1; x, r \in \mathbb{R}$

$$x = \log_a(b) \Leftrightarrow a^x = b$$

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c) \quad \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c) \quad \log_a(b^r) = r \cdot \log_a(b)$$

$$\log_a(a^x) = x \quad \log_a(a) = 1 \quad \log_a(1) = 0 \quad \log_a\left(\frac{1}{a}\right) = -1 \quad a^{\log_a(b)} = b$$

natürlicher Logarithmus (Logarithmus zur Basis  $e$ ):  $\ln(b) = \log_e(b)$

dekadischer Logarithmus (Logarithmus zur Basis 10):  $\lg(b) = \log_{10}(b)$

## 5 Quadratische Gleichungen

$p, q \in \mathbb{R}$

$a, b, c \in \mathbb{R}$  mit  $a \neq 0$

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Satz von Vieta

$x_1$  und  $x_2$  sind genau dann die Lösungen der Gleichung  $x^2 + p \cdot x + q = 0$ , wenn gilt:

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

Zerlegung in Linearfaktoren

$$x^2 + p \cdot x + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

# 6 Ebene Figuren

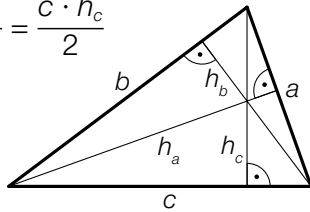
A ... Flächeninhalt  
u ... Umfang

## Dreieck

Allgemeines Dreieck

$$A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

$$u = a + b + c$$

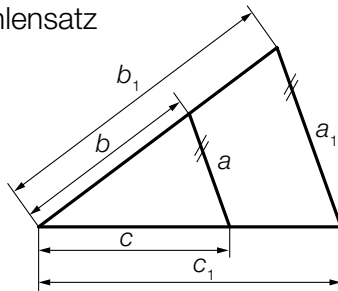


Heron'sche Flächenformel

$$A = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)} \text{ mit } s = \frac{a + b + c}{2}$$

Ähnlichkeit und Strahlensatz

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$



Rechtwinkeliges Dreieck

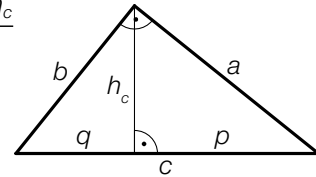
mit Hypotenuse c und Katheten a, b

$$A = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

$$h_c^2 = p \cdot q$$

$$a^2 = c \cdot p$$

$$b^2 = c \cdot q$$



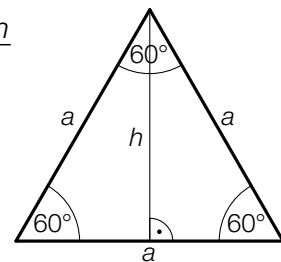
Satz des Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Gleichseitiges Dreieck

$$A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{a \cdot h}{2}$$

$$h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$$

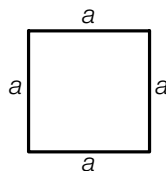


## Viereck

Quadrat

$$A = a^2$$

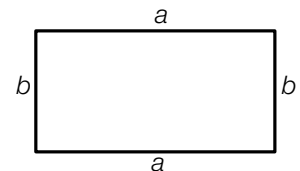
$$u = 4 \cdot a$$



Rechteck

$$A = a \cdot b$$

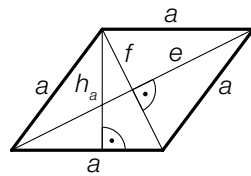
$$u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$$



Raute (Rhombus)

$$A = a \cdot h_a = \frac{e \cdot f}{2}$$

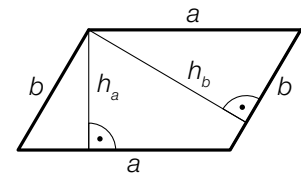
$$u = 4 \cdot a$$



Parallelogramm

$$A = a \cdot h_a = b \cdot h_b$$

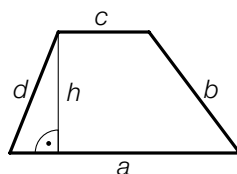
$$u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$$



Trapez

$$A = \frac{(a + c) \cdot h}{2}$$

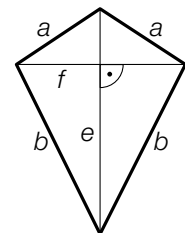
$$u = a + b + c + d$$



Deltoid

$$A = \frac{e \cdot f}{2}$$

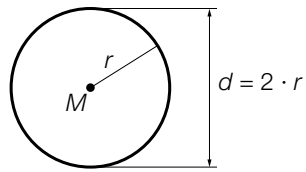
$$u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$$



## Kreis

$$A = \pi \cdot r^2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$u = 2 \cdot \pi \cdot r = \pi \cdot d$$

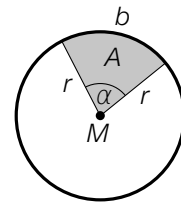


## Kreisbogen und Kreis Sektor

$\alpha$  im Gradmaß ( $^\circ$ )

$$b = \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{180^\circ}$$

$$A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{b \cdot r}{2}$$



## 7 Körper

$V$  ... Volumen

$O$  ... Inhalt der Oberfläche

$G$  ... Inhalt der Grundfläche

$M$  ... Inhalt der Mantelfläche

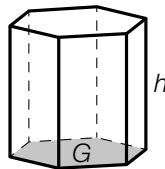
$u_G$  ... Umfang der Grundfläche

### Prisma

$$V = G \cdot h$$

$$M = u_G \cdot h$$

$$O = 2 \cdot G + M$$

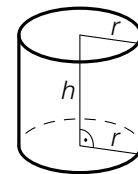


### Drehzylinder

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

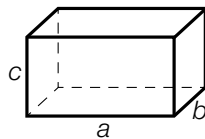
$$O = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$



### Quader

$$V = a \cdot b \cdot c$$

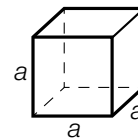
$$O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$$



### Würfel

$$V = a^3$$

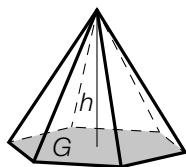
$$O = 6 \cdot a^2$$



### Pyramide

$$V = \frac{G \cdot h}{3}$$

$$O = G + M$$



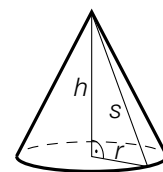
### Drehkegel

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$M = \pi \cdot r \cdot s$$

$$O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$$

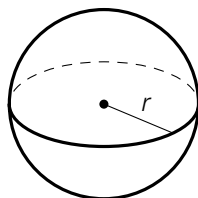
$$s = \sqrt{h^2 + r^2}$$



### Kugel

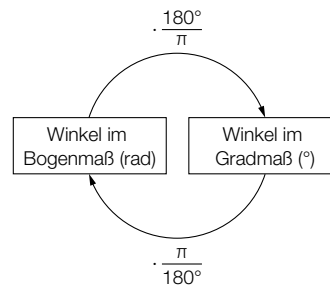
$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$



# 8 Trigonometrie

## Umrechnung zwischen Gradmaß und Bogenmaß

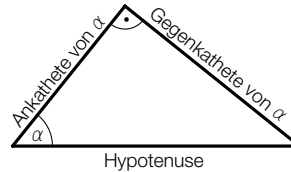


## Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck

Sinus:  $\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$

Cosinus:  $\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$

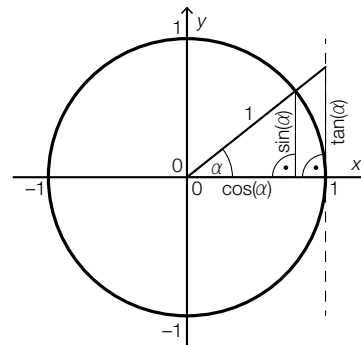
Tangens:  $\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$



## Trigonometrie im Einheitskreis

$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$  für  $\cos(\alpha) \neq 0$



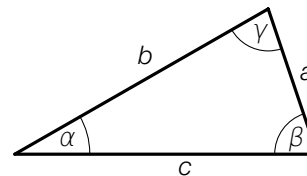
## Trigonometrie im allgemeinen Dreieck

Sinussatz:  $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

Cosinussatz:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$



Trigonometrische Flächenformel:

$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma)$

## Allgemeine Sinusfunktion (in Abhängigkeit von der Zeit t)

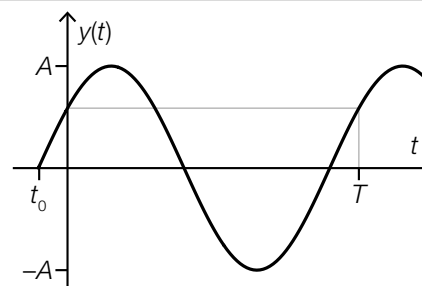
A ... Amplitude  
 $\omega$  ... Kreisfrequenz  
 $\varphi$  ... Nullphasenwinkel

T ... Schwingungsdauer (Periodendauer)  
 f ... Frequenz

$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$

$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{1}{f}$

$t_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$

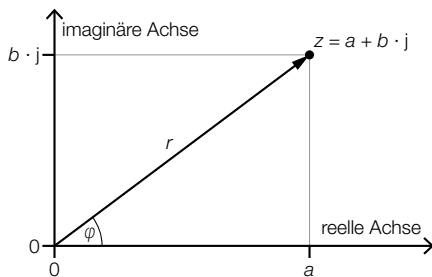


# 9 Komplexe Zahlen

j bzw. i ... imaginäre Einheit mit $j^2 = -1$ bzw. $i^2 = -1$	
a ... Realteil, $a \in \mathbb{R}$	r ... Betrag, $r \in \mathbb{R}_0^+$
b ... Imaginärteil, $b \in \mathbb{R}$	$\varphi$ ... Argument, $\varphi \in \mathbb{R}$

## Komponentenform

$$z = a + b \cdot j$$



## Polarformen

$$z = r \cdot [\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)] = r \cdot e^{j \cdot \varphi} = (r; \varphi) = r \angle \varphi$$

## Umrechnungen

$$\begin{aligned} a &= r \cdot \cos(\varphi) & r &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ b &= r \cdot \sin(\varphi) & \tan(\varphi) &= \frac{b}{a} \end{aligned}$$

# 10 Vektoren

P, Q ... Punkte

## Vektoren in $\mathbb{R}^2$

Pfeil von P nach Q:

$$P = (p_1 | p_2), Q = (q_1 | q_2)$$

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}$$

## Rechenregeln in $\mathbb{R}^2$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \end{pmatrix}$$

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \end{pmatrix} \text{ mit } k \in \mathbb{R}$$

## Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

## Betrag (Länge) eines Vektors in $\mathbb{R}^2$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

## Normalvektoren $\vec{n}$ zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$

$$\vec{n} = k \cdot \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \text{ für } |\vec{a}| \neq 0 \text{ und } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

## Vektoren in $\mathbb{R}^n$

Pfeil von P nach Q:

$$P = (p_1 | p_2 | \dots | p_n), Q = (q_1 | q_2 | \dots | q_n)$$

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix}$$

## Rechenregeln in $\mathbb{R}^n$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ \vdots \\ a_n \pm b_n \end{pmatrix}$$

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \\ \vdots \\ k \cdot a_n \end{pmatrix} \text{ mit } k \in \mathbb{R}$$

## Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n$$

## Betrag (Länge) eines Vektors in $\mathbb{R}^n$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$



## Orthogonalitätskriterium in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \text{ für } |\vec{a}| \neq 0 \text{ und } |\vec{b}| \neq 0$$

## Parallelitätskriterium in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k \cdot \vec{b} \text{ für } |\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0 \text{ und } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

## Winkel $\varphi$ zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \text{ für } |\vec{a}| \neq 0 \text{ und } |\vec{b}| \neq 0$$

## Einheitsvektor $\vec{a}_0$ in Richtung $\vec{a}$

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} \text{ für } |\vec{a}| \neq 0$$

## Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

# 11 Geraden

$g$ ... Gerade	$\vec{g}$ ... ein Richtungsvektor der Geraden $g$
	$\vec{n}$ ... ein Normalvektor der Geraden $g$
	$X, P$ ... Punkte auf der Geraden $g$
	$k$ ... Steigung der Geraden $g$
	$\alpha$ ... Steigungswinkel der Geraden $g$
	$a, b, c, k, d \in \mathbb{R}$

## Parameterdarstellung einer Geraden $g$ in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

$$g: X = P + t \cdot \vec{g} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

## Gleichung einer Geraden $g$ in $\mathbb{R}^2$

explizite Form der Geradengleichung:  $g: y = k \cdot x + d$  dabei gilt  $k = \tan(\alpha)$

allgemeine Geradengleichung:  $g: a \cdot x + b \cdot y = c$

Normalvektordarstellung:  $g: \vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P$

dabei gilt  $\vec{n} \parallel \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  für  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

# 12 Matrizen

$$a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}; i, j, m, n, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}; k \in \mathbb{R}$$

## Addition/Subtraktion von Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

## Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl $k$

$$k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & \dots & k \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{m1} & \dots & k \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

## Multiplikation von Matrizen

$A$  ...  $m \times p$ -Matrix

$B$  ...  $p \times n$ -Matrix

$C = A \cdot B$  ...  $m \times n$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ip} \cdot b_{pj}$$

## Einheitsmatrix $E$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Transponierte Matrix $A^T$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

## Inverse Matrix $A^{-1}$ einer quadratischen Matrix $A$

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

## Lineare Gleichungssysteme in Matrizenschreibweise ( $n$ Gleichungen in $n$ Variablen)

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2$$

...

$$a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nn} \cdot x_n = b_n$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Wenn die inverse Matrix  $A^{-1}$  existiert, dann gilt:  $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$

## Produktionsprozesse

$A$  ... quadratische Verflechtungsmatrix

$E$  ... Einheitsmatrix

$\vec{x}$  ... Produktionsvektor

$\vec{n}$  ... Nachfragevektor

$$\vec{x} = A \cdot \vec{x} + \vec{n}$$

$$\vec{x} = (E - A)^{-1} \cdot \vec{n}$$

$$\vec{n} = (E - A) \cdot \vec{x}$$

## 13 Folgen und Reihen

---

### Arithmetische Folge

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots)$$

$$d = a_{n+1} - a_n$$

Rekursives Bildungsgesetz

$$a_{n+1} = a_n + d \text{ und Angabe von } a_1$$

Explizites Bildungsgesetz

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

### Endliche arithmetische Reihe

Summe  $s_n$  der ersten  $n$  Glieder

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} \cdot [2 \cdot a_1 + (n - 1) \cdot d]$$

### Geometrische Folge

$$(b_n) = (b_1, b_2, b_3, \dots)$$

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Rekursives Bildungsgesetz

$$b_{n+1} = b_n \cdot q \text{ und Angabe von } b_1$$

Explizites Bildungsgesetz

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

### Endliche geometrische Reihe

Summe  $s_n$  der ersten  $n$  Glieder

$$s_n = \sum_{i=1}^n b_i = b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n$$

$$s_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{für } q \neq 1$$

### Unendliche geometrische Reihe

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  ist genau dann konvergent,  
wenn  $|q| < 1$

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{b_1}{1 - q} \quad \text{für } |q| < 1$$

## 14 Änderungsmaße

---

Für eine auf einem Intervall  $[a; b]$  definierte reelle Funktion  $f$  gilt:

**Absolute Änderung** von  $f$  in  $[a; b]$

$$f(b) - f(a)$$

**Relative (prozentuelle) Änderung** von  $f$  in  $[a; b]$

$$\frac{f(b) - f(a)}{f(a)} \quad \text{für } f(a) \neq 0$$

**Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate)** von  $f$  in  $[a; b]$  bzw. in  $[x; x + \Delta x]$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{bzw.} \quad \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{für } b \neq a \quad \text{bzw.} \quad \Delta x \neq 0$$

**Differenzialquotient (lokale bzw. „momentane“ Änderungsrate)** von  $f$  an der Stelle  $x$

$$f'(x) = \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \quad \text{bzw.} \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

# 15 Wachstums- und Abnahmeprozesse

$t$  ... Zeit

$N(t)$  ... Bestand zur Zeit  $t$

$N_0 = N(0)$  ... Bestand zur Zeit  $t = 0$

## Linear

$k \in \mathbb{R}^+$

lineares Wachstum  $N(t) = N_0 + k \cdot t$

lineare Abnahme  $N(t) = N_0 - k \cdot t$

## Exponentiell

$a, \lambda \in \mathbb{R}^+$  mit  $a \neq 1$  und  $N_0 > 0$

$a$  ... Änderungsfaktor

exponentielles Wachstum  $N(t) = N_0 \cdot a^t$  für  $a > 1$   $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$

exponentielle Abnahme  $N(t) = N_0 \cdot a^t$  für  $0 < a < 1$   $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

## Beschränkt

$S, a, \lambda \in \mathbb{R}^+$  mit  $0 < a < 1$

$S$  ... Sättigungswert, Kapazitätsgrenze

beschränktes Wachstum (Sättigungsfunktion)  $N(t) = S - b \cdot a^t$  mit  $b = S - N_0$   $N(t) = S - b \cdot e^{-\lambda \cdot t}$  mit  $b = S - N_0$

beschränkte Abnahme (Abklingfunktion)  $N(t) = S + b \cdot a^t$  mit  $b = |S - N_0|$   $N(t) = S + b \cdot e^{-\lambda \cdot t}$  mit  $b = |S - N_0|$

## Logistisch

$S, a, \lambda \in \mathbb{R}^+$  mit  $0 < a < 1$  und  $N_0 > 0$

$S$  ... Sättigungswert, Kapazitätsgrenze

logistisches Wachstum  $N(t) = \frac{S}{1 + c \cdot a^t}$  mit  $c = \frac{S - N_0}{N_0}$   $N(t) = \frac{S}{1 + c \cdot e^{-\lambda \cdot t}}$  mit  $c = \frac{S - N_0}{N_0}$

# 16 Ableitung und Integral

$f, g, h \dots$  auf ganz  $\mathbb{R}$  oder einem Intervall definierte differenzierbare Funktionen

$f', g', h' \dots$  Ableitungsfunktionen

$F, G, H \dots$  Stammfunktionen

$C, k, q \in \mathbb{R}; a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

## Unbestimmtes Integral

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \text{mit} \quad F' = f$$

## Bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Funktion	Ableitungsfunktion	Stammfunktion
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$F(x) = k \cdot x$
$f(x) = x^q$	$f'(x) = q \cdot x^{q-1}$	$F(x) = \frac{x^{q+1}}{q+1}$ für $q \neq -1$ $F(x) = \ln( x )$ für $q = -1$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln(a)}$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = x \cdot \ln(x) - x$
$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$	$F(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot (x \cdot \ln(x) - x)$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$F(x) = -\cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$F(x) = \sin(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$F(x) = -\ln( \cos(x) )$
$g(x) = k \cdot f(x)$	$g'(x) = k \cdot f'(x)$	$G(x) = k \cdot F(x)$
$h(x) = f(x) \pm g(x)$	$h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$	$H(x) = F(x) \pm G(x)$
$g(x) = f(k \cdot x)$	$g'(x) = k \cdot f'(k \cdot x)$	$G(x) = \frac{1}{k} \cdot F(k \cdot x)$

## Ableitungsregeln

Faktorregel	$(k \cdot f)' = k \cdot f'$
Summenregel	$(f \pm g)' = f' \pm g'$
Produktregel	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
Quotientenregel	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ für $g(x) \neq 0$
Kettenregel	$h(x) = f(g(x)) \Rightarrow h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

## Integrationsmethode – lineare Substitution

$$\int f(a \cdot x + b) dx = \frac{F(a \cdot x + b)}{a} + C$$

## Volumen $V$ von Rotationskörpern

Rotation des Graphen einer Funktion  $f$  mit  $y = f(x)$  um eine Koordinatenachse

Rotation um die  $x$ -Achse ( $a \leq x \leq b$ )

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b y^2 dx$$

Rotation um die  $y$ -Achse ( $c \leq y \leq d$ )

$$V_y = \pi \cdot \int_c^d x^2 dy$$

## Bogenlänge $s$ des Graphen einer Funktion $f$ im Intervall $[a; b]$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

## Linearer Mittelwert $m$ einer Funktion $f$ im Intervall $[a; b]$

$$m = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$$

# 17 Differenzialgleichungen 1. Ordnung

---

## Differenzialgleichungen mit trennbaren Variablen

$$y' = f(x) \cdot g(y) \text{ bzw. } \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \text{ mit } y = y(x)$$

## Lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$y$  ... allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung

$y_h$  ... allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung  $y' + a \cdot y = 0$

$y_p$  ... partikuläre (spezielle) Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung

$s$  ... Störfunktion

$$y' + a \cdot y = s(x) \text{ mit } a \in \mathbb{R}, y = y(x)$$

$$y = y_h + y_p$$

# 18 Statistik

$x_1, x_2, \dots, x_n$  ... eine Liste von  $n$  reellen Zahlen  
Dabei treten  $k$  verschiedene Werte  $x_1, x_2, \dots, x_k$  auf.  
 $H_i$  ... absolute Häufigkeit von  $x_i$  mit  $H_1 + H_2 + \dots + H_k = n$

## Relative Häufigkeit $h_i$ von $x_i$

$$h_i = \frac{H_i}{n}$$

## Lagemaße

Arithmetisches Mittel  $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot H_1 + x_2 \cdot H_2 + \dots + x_k \cdot H_k}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k x_i \cdot H_i$$

Geometrisches Mittel  $\bar{x}_{\text{geo}}$

$$\bar{x}_{\text{geo}} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \quad \text{für } x_i > 0$$

Median  $\tilde{x}$  bei metrischen Daten

$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$  ... geordnete Liste mit  $n$  Werten

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})} & \dots \text{ für } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2} \cdot (x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}) & \dots \text{ für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Quartile

$q_1$ : Mindestens 25 % der Werte sind kleiner oder gleich  $q_1$ , zugleich sind mindestens 75 % der Werte größer oder gleich  $q_1$ .

$q_2 = \tilde{x}$ : Mindestens 50 % der Werte sind kleiner oder gleich  $q_2$ , zugleich sind mindestens 50 % der Werte größer oder gleich  $q_2$ .

$q_3$ : Mindestens 75 % der Werte sind kleiner oder gleich  $q_3$ , zugleich sind mindestens 25 % der Werte größer oder gleich  $q_3$ .

## Streuungsmaße

Spannweite:  $x_{\max} - x_{\min}$

(Inter)quartilsabstand:  $q_3 - q_1$

$s^2$  ... (empirische) Varianz einer Datenliste

$s$  ... (empirische) Standardabweichung einer Datenliste

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot H_i$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot H_i}$$

Wenn aus einer Stichprobe vom Umfang  $n$  die Varianz einer Grundgesamtheit geschätzt werden soll:

$$s_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$s_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot H_i$$

$$s_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$s_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot H_i}$$

# 19 Wahrscheinlichkeit

$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}; k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$
$A, B \dots$ Ereignisse
$\bar{A}$ bzw. $\neg A \dots$ Gegenereignis von $A$
$A \cap B$ bzw. $A \wedge B \dots$ $A$ und $B$ (sowohl das Ereignis $A$ als auch das Ereignis $B$ treten ein)
$A \cup B$ bzw. $A \vee B \dots$ $A$ oder $B$ (mindestens eines der beiden Ereignisse $A$ und $B$ tritt ein)
$P(A) \dots$ Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses $A$
$P(A B) \dots$ Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses $A$ unter der Voraussetzung, dass das Ereignis $B$ eingetreten ist (bedingte Wahrscheinlichkeit)

Fakultät (Faktorielle)

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1$$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

## Wahrscheinlichkeit bei einem Laplace-Versuch

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ausgänge}}{\text{Anzahl der möglichen Ausgänge}}$$

## Elementare Regeln

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$\text{bzw. } P(\neg A) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

$$\text{bzw. } P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Wenn  $A$  und  $B$  (stochastisch) unabhängig voneinander sind:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\text{bzw. } P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\text{bzw. } P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$$

Wenn  $A$  und  $B$  unvereinbar sind:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$\text{bzw. } P(A \vee B) = P(A) + P(B)$$

## Bedingte Wahrscheinlichkeit von $A$ unter der Bedingung $B$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\text{bzw. } P(A|B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)}$$

## Satz von Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})}$$

bzw.

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(\neg A) \cdot P(B|\neg A)}$$



Erwartungswert  $\mu$  einer diskreten Zufallsvariablen  $X$  mit den Werten  $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\mu = E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \dots + x_n \cdot P(X = x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i)$$

Varianz  $\sigma^2$  einer diskreten Zufallsvariablen  $X$  mit den Werten  $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$$

Standardabweichung  $\sigma$

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

**Binomialverteilung**

$$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}; k \in \mathbb{N}; p \in \mathbb{R} \text{ mit } k \leq n \text{ und } 0 \leq p \leq 1$$

Zufallsvariable  $X$  ist binomialverteilt mit den Parametern  $n$  und  $p$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

$$\text{Erwartungswert: } E(X) = \mu = n \cdot p$$

$$\text{Varianz: } V(X) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

**Normalverteilung**

$$\mu, \sigma \in \mathbb{R} \text{ mit } \sigma > 0$$

$f$  ... Dichtefunktion

$F$  ... Verteilungsfunktion

$\varphi$  ... Dichtefunktion der Standardnormalverteilung

$\Phi$  ... Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

Normalverteilung  $N(\mu; \sigma^2)$ : Zufallsvariable  $X$  ist normalverteilt mit dem Erwartungswert  $\mu$  und der Standardabweichung  $\sigma$  bzw. der Varianz  $\sigma^2$

$$P(X \leq x_1) = F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(x) dx = \int_{-\infty}^{x_1} \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Wahrscheinlichkeiten für  $\sigma$ -Umgebungen

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,683$$

$$P(\mu - 2 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 2 \cdot \sigma) \approx 0,954$$

$$P(\mu - 3 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 3 \cdot \sigma) \approx 0,997$$

Standardnormalverteilung  $N(0; 1)$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$\phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z \varphi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$$

$$P(-z \leq Z \leq z) = 2 \cdot \phi(z) - 1$$

$P(-z \leq Z \leq z)$	= 90 %	= 95 %	= 99 %
$z$	$\approx 1,645$	$\approx 1,960$	$\approx 2,576$

## Zufallsstrebereich und Konfidenzintervall

$\mu, \sigma, \alpha \in \mathbb{R}$  mit  $\sigma > 0$  und  $0 < \alpha < 1$

$\bar{x}$  ... Stichprobenmittelwert

$s_{n-1}$  ... Standardabweichung einer Stichprobe

$n$  ... Stichprobenumfang

$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  ...  $(1-\frac{\alpha}{2})$ -Quantil der Standardnormalverteilung

$t_{f, 1-\frac{\alpha}{2}}$  ...  $(1-\frac{\alpha}{2})$ -Quantil der  $t$ -Verteilung mit  $f$  Freiheitsgraden

Zweiseitiger  $(1-\alpha)$ -Zufallsstrebereich für einen Einzelwert einer normalverteilten Zufallsvariablen

$$\left[ \mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma; \mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma \right]$$

Zweiseitiger  $(1-\alpha)$ -Zufallsstrebereich für den Stichprobenmittelwert normalverteilter Werte

$$\left[ \mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Zweiseitiges  $(1-\alpha)$ -Konfidenzintervall für den Erwartungswert einer normalverteilten Zufallsvariablen

$\sigma$  bekannt:  $\left[ \bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$

$\sigma$  unbekannt:  $\left[ \bar{x} - t_{f, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_{f, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}} \right]$  mit  $f = n - 1$

## 20 Lineare Regression

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  ... Wertepaare

$\bar{x}, \bar{y}$  ... arithmetisches Mittel der  $x_i$  bzw.  $y_i$

Lineare Regressionsfunktion  $f$  mit  $f(x) = k \cdot x + d$

$$k = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$d = \bar{y} - k \cdot \bar{x}$$

Korrelationskoeffizient nach Pearson

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

# 21 Finanzmathematik

## Zinsen und Zinseszinsen

$K_0$  ... Anfangskapital  
 $K_n$  ... Endkapital nach  $n$  Jahren  
 $i$  ... Jahreszinssatz

einfache Verzinsung:  $K_n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n)$

Zinseszinsen:  $K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$

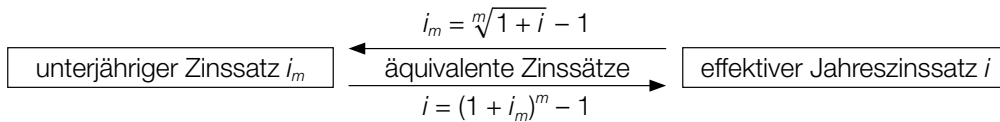
## Unterjährige Verzinsung

$m$  ... Anzahl der Zinsperioden pro Jahr

Für Zinsperioden gelten folgende Abkürzungen:

p. a. ... pro Jahr  
 p. s. ... pro Semester  
 p. q. ... pro Quartal  
 p. m. ... pro Monat

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i_m)^{n \cdot m}$$



## Rentenrechnung

$R$  ... Ratenhöhe  
 $n$  ... Anzahl der Raten  
 $i$  ... Zinssatz  
 $q = 1 + i$  ... Aufzinsungsfaktor

Voraussetzung: Rentenperiode = Zinsperiode

	nachsüssig	vorschüssig
Endwert $E$	$E_{\text{nach}} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$	$E_{\text{vor}} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q$
Barwert $B$	$B_{\text{nach}} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^n}$	$B_{\text{vor}} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^{n-1}}$

## Tilgungsplan

Zeitabschnitt	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				$K_0$
1	$K_0 \cdot i$	$T_1$	$A_1 = K_0 \cdot i + T_1$	$K_1 = K_0 - T_1$
...	...	...	...	...

## 22 Investitionsrechnung

---

$E_t$ ... Einnahmen im Jahr $t$
$A_t$ ... Ausgaben im Jahr $t$
$A_0$ ... Anschaffungskosten
$R_t$ ... Rückflüsse im Jahr $t$
$i$ ... kalkulatorischer Zinssatz (Jahreszinssatz)
$n$ ... Nutzungsdauer in Jahren
$i_w$ ... Wiederveranlagungszinssatz (Jahreszinssatz)
$E$ ... Endwert der wiederveranlagten Rückflüsse

$$R_t = E_t - A_t$$

### Kapitalwert $C_0$

$$C_0 = -A_0 + \left[ \frac{R_1}{(1+i)} + \frac{R_2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{R_n}{(1+i)^n} \right]$$

### Interner Zinssatz $i_{\text{intern}}$

$$-A_0 + \left[ \frac{R_1}{(1+i_{\text{intern}})} + \frac{R_2}{(1+i_{\text{intern}})^2} + \dots + \frac{R_n}{(1+i_{\text{intern}})^n} \right] = 0$$

### Modifizierter interner Zinssatz $i_{\text{mod}}$

$$A_0 \cdot (1+i_{\text{mod}})^n = E \quad \text{mit} \quad E = R_1 \cdot (1+i_w)^{n-1} + R_2 \cdot (1+i_w)^{n-2} + \dots + R_{n-1} \cdot (1+i_w) + R_n$$

## 23 Kosten- und Preistheorie

$x$  ... produzierte, angebotene, nachgefragte bzw. verkaufte Menge ( $x \geq 0$ )

Kostenfunktion $K$	$K(x)$
Fixkosten $F$	$K(0)$
variable Kostenfunktion $K_v$	$K_v(x) = K(x) - F$
Grenzkostenfunktion $K'$	$K'(x)$
Stückkostenfunktion (Durchschnittskostenfunktion) $\bar{K}$	$\bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$
variable Stückkostenfunktion (variable Durchschnittskostenfunktion) $\bar{K}_v$	$\bar{K}_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}$
Betriebsoptimum $x_{\text{opt}}$	$\bar{K}'(x_{\text{opt}}) = 0$ (Minimumstelle von $\bar{K}$ )
langfristige Preisuntergrenze (kostendeckender Preis)	$\bar{K}(x_{\text{opt}})$
Betriebsminimum $x_{\text{min}}$	$\bar{K}_v'(x_{\text{min}}) = 0$ (Minimumstelle von $\bar{K}_v$ )
kurzfristige Preisuntergrenze	$\bar{K}_v(x_{\text{min}})$
Kostenkehre	$K'''(x) = 0$
progressiver Kostenverlauf	$K'''(x) > 0$
degressiver Kostenverlauf	$K'''(x) < 0$
<hr/>	
Preis $p$	
Preisfunktion der Nachfrage (Preis-Absatz-Funktion) $p_N$	$p_N(x)$
Preisfunktion des Angebots $p_A$	$p_A(x)$
Marktgleichgewicht	$p_A(x) = p_N(x)$
Höchstpreis	$p_N(0)$
Sättigungsmenge	$p_N(x) = 0$
<hr/>	
Erlösfunktion (Umsatzfunktion) $E$	$E(x) = p \cdot x$ bzw. $E(x) = p_N(x) \cdot x$
Grenzerlösfunktion $E'$	$E'(x)$
<hr/>	
Gewinnfunktion $G$	$G(x) = E(x) - K(x)$
Grenzgewinnfunktion $G'$	$G'(x)$
untere Gewinngrenze (Break-even-Point, Gewinnschwelle) $x_u$ obere Gewinngrenze $x_o$	$G(x_u) = G(x_o) = 0$ mit $x_u \leq x_o$
Gewinnbereich (Gewinnzone)	$[x_u; x_o]$
Cournot'scher Punkt $C$	$C = (x_c   p_N(x_c))$ mit $G'(x_c) = 0$

## 24 Technisch-naturwissenschaftliche Grundlagen

---

$\rho$ ... Dichte	$t$ ... Zeit
$m$ ... Masse	$s$ ... Weg
$V$ ... Volumen	$v$ ... Geschwindigkeit
$F$ ... Kraft	$a$ ... Beschleunigung
$W$ ... Arbeit	$v_0$ ... Anfangsgeschwindigkeit
$P$ ... Leistung	

---

Dichte	$\rho = \frac{m}{V}$
--------	----------------------

---

Kraft	$F = m \cdot a$
-------	-----------------

---

Arbeit	$W = F \cdot s$
--------	-----------------

---

Leistung	$P = \frac{W}{t}$
----------	-------------------

---

### Bewegungsvorgänge

Geschwindigkeit bei einer gleichförmigen geradlinigen Bewegung	$v = \frac{s}{t}$
--	-------------------

---

Geschwindigkeit bei einer gleichmäßig beschleunigten geradlinigen Bewegung	$v = a \cdot t + v_0$
--	-----------------------

---

Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit $t$	$v(t) = s'(t)$
--	----------------

---

Beschleunigung in Abhängigkeit von der Zeit $t$	$a(t) = v'(t) = s''(t)$
---	-------------------------

---

# Index

---

## A

Abklingfunktion 12  
Ableitung 13  
Ableitungsfunktion 13  
Ableitungsregeln 13  
absolute Änderung 11  
absolute Häufigkeit 15  
Ähnlichkeit 5  
allgemeine Geradengleichung 9  
allgemeines Dreieck 5, 7  
Amplitude 7  
Änderungsfaktor 12  
Änderungsmaße 11  
Änderungsrate 11  
Anfangskapital 19  
Annuität 19  
Anschaffungskosten 20  
äquivalente Zinssätze 19  
Arbeit 22  
arithmetische Folge 11  
arithmetisches Mittel 15  
arithmetische Reihe 11  
Aufzinsungsfaktor 19

## B

Barwert 19  
bedingte Wahrscheinlichkeit 16  
Beschleunigung 22  
beschränkte Abnahme 12  
beschränktes Wachstum 12  
bestimmtes Integral 13  
Betrag (eines Vektors) 8  
Betriebsminimum 21  
Betriebsoptimum 21  
Bewegungsvorgänge 22  
Binomialkoeffizient 16  
Binomialverteilung 17  
binomische Formeln 4  
Bogenlänge 14  
Bogenmaß 7  
Break-even-Point 21

## C

Cosinus 7  
Cosinussatz 7  
Cournot'scher Punkt 21

## D

degressiver Kostenverlauf 21  
Deka- 3  
dekadischer Logarithmus 4  
Deltoid 5  
Dezi- 3  
Dichte 22  
Dichtefunktion 17  
Differenzenquotient 11  
Differenzialgleichungen 14  
Differenzialquotient 11

Differenzmenge 3  
diskrete Zufallsvariable 17  
Drehkegel 6  
Drehzylinder 6  
Dreieck 5  
Durchschnitt(smenge) 3  
Durchschnittskostenfunktion 21

## E

ebene Figuren 5  
echte Teilmenge 3  
effektiver Jahreszinssatz 19  
einfache Verzinsung 19  
Einheitskreis 7  
Einheitsmatrix 10  
Einheitsvektor 9  
Element 3  
Endkapital 19  
Endwert 19, 20  
Erlösfunktion 21  
Erwartungswert 17  
explizites Bildungsgesetz 11  
exponentielle Abnahme 12  
exponentielles Wachstum 12

## F

Faktorielle 16  
Faktorregel 13  
Fakultät 16  
Finanzmathematik 19  
Fixkosten 21  
Flächeninhalt 5  
Folgen 11  
Freiheitsgrad 18  
Frequenz 7

## G

ganze Zahlen 3  
Gegenereignis 16  
geometrische Folge 11  
geometrische Reihe 11  
geometrisches Mittel 15  
Gerade 9  
Geradengleichung 9  
Geschwindigkeit 22  
Gewinnbereich 21  
Gewinnfunktion 21  
Gewinngrenze 21  
Gewinnschwelle 21  
Gewinnzone 21  
Giga- 3  
gleichförmige geradlinige  
Bewegung 22  
gleichmäßig beschleunigte  
geradlinige Bewegung 22  
gleichseitiges Dreieck 5  
Gradmaß 7  
Grenzerlösfunktion 21

Grenzgewinnfunktion 21  
Grenzkostenfunktion 21  
Grundfläche 6

## H

Hekto- 3  
Heron'sche Flächenformel 5  
Höchstpreis 21  
homogene Differenzial-  
gleichung 14  
Hypotenuse 5, 7

## I

Imaginärteil 8  
inhomogene Differenzial-  
gleichung 14  
Integral 13  
interner Zinssatz 20  
Interquartilsabstand 15  
inverse Matrix 10  
Investitionsrechnung 20

## J

Jahreszinssatz 19, 20

## K

kalkulatorischer Zinssatz 20  
Kapazitätsgrenze 12  
Kapitalwert 20  
Kathete 5, 7  
Kettenregel 13  
Kilo- 3  
komplexe Zahlen 8  
Komponentenform 8  
Konfidenzintervall 18  
Körper 6  
Korrelationskoeffizient 18  
Kosten- und Preistheorie 21  
kostendeckender Preis 21  
Kostenfunktion 21  
Kostenkehre 21  
Kraft 22  
Kreis 6  
Kreisbogen 6  
Kreisfrequenz 7  
Kreissektor 6  
Kugel 6  
kurzfristige Preisuntergrenze 21

## L

Lagemaße 15  
langfristige Preisuntergrenze 21  
Laplace-Versuch 16  
leere Menge 3  
Leistung 22  
lineare Abnahme 12  
lineare Gleichungssysteme 10  
lineare Regression 18

lineare Substitution 14  
linearer Mittelwert 14  
lineares Wachstum 12  
Linearfaktoren 4  
Logarithmen 4  
logistisches Wachstum 12  
lokale Änderungsrate 11

## M

Mantelfläche 6  
Marktgleichgewicht 21  
Masse 22  
Matrix 10  
Median 15  
Mega- 3  
Mengen 3  
Mikro- 3  
Milli- 3  
Mittelwert 15  
mittlere Änderungsrate 11  
modifizierter interner Zinssatz 20  
momentane Änderungsrate 11

## N

Nachfragevektor 10  
nachsüchtig 19  
Nano- 3  
natürliche Zahlen 3  
natürlicher Logarithmus 4  
Normalvektor 8  
Normalverteilung 17  
Nullphasenwinkel 7  
Nutzungsdauer 20

## O

Oberfläche 6  
Orthogonalitätskriterium 9

## P

Parallelitätskriterium 9  
Parallelogramm 5  
Parameterdarstellung 9  
Periodendauer 7  
Pico- 3  
Polarformen 8  
Potenzen 3  
Preis 21  
Preis-Absatz-Funktion 21  
Preisfunktion der Nachfrage 21  
Preisfunktion des Angebots 21  
Prisma 6  
Produktionsprozesse 10  
Produktionsvektor 10  
Produktregel 13  
progressiver Kostenverlauf 21  
prozentuelle Änderung 11  
Pyramide 6

## Q

Quader 6  
Quadrat 5  
quadratische Gleichungen 4  
Quantil 18  
Quartil 15  
Quartilsabstand 15  
Quotientenregel 13

## R

Rate 19  
Ratenhöhe 19  
rationale Exponenten 3  
rationale Zahlen 3  
Raute 5  
Realteil 8  
Rechteck 5  
rechtwinkeliges Dreieck 5, 7  
reelle Zahlen 3  
Reihen 11  
rekursives Bildungsgesetz 11  
relative Änderung 11  
relative Häufigkeit 15  
Rentenrechnung 19  
Restschuld 19  
Rhombus 5  
Richtungsvektor 9  
Rotationskörper 14  
Rückflüsse 20

## S

Sättigungsfunktion 12  
Sättigungsmenge 21  
Sättigungswert 12  
Satz des Pythagoras 5  
Satz von Bayes 16  
Satz von Vieta 4  
Schwingungsdauer 7  
Sigma-Umgebungen 17  
Sinus 7  
Sinusfunktion 7  
Sinussatz 7  
Skalarprodukt 8  
Spannweite 15  
Stammfunktion 13  
Standardabweichung 15, 17  
Standardnormalverteilung 17  
Statistik 15  
Steigung 9  
Steigungswinkel 9  
Stichprobe 15, 18  
Stichprobenmittelwert 18  
Stichprobenumfang 18  
Störfunktion 14  
Strahlensatz 5  
Streuungsmaße 15  
Stückkostenfunktion 21  
Summenregel 13

## T

Tangens 7  
Teilmenge 3  
Tera- 3  
Tilgungsanteil 19  
Tilgungsplan 19  
transponierte Matrix 10  
Trapez 5  
trennbare Variablen 14  
Trigonometrie 7  
trigonometrische Flächenformel 7  
 $t$ -Verteilung 18

## U

Umfang 5, 6  
Umsatzfunktion 21  
unbestimmtes Integral 13  
unendliche geometrische Reihe 11  
unterjährige Verzinsung 19

## V

variable Durchschnittskostenfunktion 21  
variable Kostenfunktion 21  
variable Stückkostenfunktion 21  
Varianz 15, 17  
Vektoren 8  
Vektorprodukt 9  
Vereinigung(smengen) 3  
Verflechtungsmatrix 10  
Verteilungsfunktion 17  
Verzinsung 19  
Viereck 5  
Volumen 6, 14, 22  
vorschüssig 19  
Vorsilben 3

## W

Wahrscheinlichkeit 16, 17  
Wiederveranlagungszinssatz 20  
Winkel 7  
Würfel 6  
Wurzeln 3

## Z

Zahlenmengen 3  
Zenti- 3  
Zinsanteil 19  
Zinsen 19  
Zinseszinsen 19  
Zinssatz 19  
Zufallsstrebereich 18  
Zufallsvariable 17

$\sigma$ -Umgebungen 17